

3. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sqrt{x^3-1}}{1-x^2} \right)' = \frac{(\sqrt{x^3-1})' \cdot (1-x^2) - \sqrt{x^3-1} \cdot (1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} (3x^2) \cdot (1-x^2) - \sqrt{x^3-1} (-2x)}{(1-x^2)^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot (1-x^2) + 4x \cdot (x^3-1)}{2(x^2-1)^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \\ &= \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{2((x-1)(x+1))^2 \cdot \sqrt{x^3-1}} = \frac{x^3 + x^2 + 4x}{2(x-1)(x+1)^2 \sqrt{x^3-1}} \end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili toho, že

$$(x^4 + 3x^2 - 4x) : (x-1) = x^3 + x^2 + 4x.$$

Příklad 1 (b) $f(x) = \log(\cos(e^x))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log(\cos(e^x)))' = \frac{1}{\cos(e^x)} \cdot (\cos(e^x))' = \frac{1}{\cos(e^x)} \cdot (-\sin(e^x)) \cdot e^x = \\ &= -\tan(e^x) \cdot e^x \end{aligned}$$

Příklad 1 (c) $f(x) = (\cos(2x) - e^{2x})^{-3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((\cos(2x) - e^{2x})^{-3} \right)' = -3 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (\cos(2x) - e^{2x})' = \\ &= -3 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (-\sin(2x) \cdot 2 - 2e^{2x}) = \\ &= 6 \cdot (\cos(2x) - e^{2x})^{-4} \cdot (\sin(2x) + e^{2x}) \end{aligned}$$

Příklad 1 (d) $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(x^3 - 2x + 1)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log(x^3 - 2x + 1) \right)' = \\ &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \cdot \log(x^3 - 2x + 1) + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot (\log(x^3 - 2x + 1))' \end{aligned}$$

Spočítejme derivace v posledním řádku.

$$\begin{aligned}\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\end{aligned}$$

$$(\log(x^3 - 2x + 1))' = \frac{1}{(x^3 - 2x + 1)} \cdot (x^3 - 2x + 1)' = \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x + 1)}$$

$$f'(x) = \frac{\log(x^3 - 2x + 1)}{x\sqrt{x^2 - 1}} + \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{3x^2 - 2}{(x^3 - 2x + 1)}$$

Příklad 2 (a) $f(x, y) = 35x - 4y^2 + 3x^2y$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

VypočtĚme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ - tj. zderivujme $f(x, y)$ podle x a předstĚřejme, že y je jen čĤslo.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(35x)}{\partial x} - \frac{\partial(4y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3x^2y)}{\partial x} = 35 - 0 + 6xy = 6xy + 35$$

Dále počĤtejme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ - tj. předstĚřejme, že x je čĤslo a derivujme podle promĚnnĚ y .

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(35x)}{\partial y} - \frac{\partial(4y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(3x^2y)}{\partial y} = 0 - 8y + 3x^2 = 8y + 3x^2$$

ObĚ derivace jsou definované na celĚm $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (b) $f(x, y) = \frac{\sin y^2}{x}$

$D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x} \right) = -\frac{\sin y^2}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (\sin y^2) = \frac{1}{x} \cdot \cos y^2 \cdot 2y = \frac{2y \cos y^2}{x}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (c) $f(x, y) = e^{xy} + \sin(x + y)$
 $D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ye^{xy} + \cos(x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy} + \cos(x + y)$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (d) $f(x, y) = x \tan \frac{x}{y}$
 Funkce $\tan$ není definována pro hodnoty $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tedy $\frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 Navíc $y \neq 0$ (podmínka ze zlomku).
 $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0, \frac{x}{y} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \cdot \tan \frac{x}{y} + x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \tan \frac{x}{y} + \frac{x}{y \cos^2 \frac{x}{y}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{y}} \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{-x^2}{y^2 \cos^2 \frac{x}{y}}$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (e) $f(x, y) = x^y$
 $D(f) = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, neb obecná mocnina je definována jen pro kladná x .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{y \cdot \log x} \right) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (y \cdot \log x) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{y}{x} = x^y \cdot \frac{y}{x} = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{y \cdot \log x} \right) = e^{y \cdot \log x} \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \log x) = e^{y \cdot \log x} \cdot \log x = x^y \log x$$

Obě derivace jsou definované na celém $D(f)$, tedy máme hotovo.

Příklad 2 (f) $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$
 $D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

Právě spočítaná derivace je definována pro $\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2} \neq 0$, tj. pro $x \neq -y$. Pro $x = -y$ je třeba derivaci podle x spočítat zvlášť. Zvolme tedy $y \in \mathbb{R}$ a zkusme z definice počítat $f'_x(-y, y)$.

$$\begin{aligned} f'_x(-y, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(-y + t, y) - f(-y, y)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(t - y)^3 + y^3} - \sqrt[3]{(-y)^3 + y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^3 - 3t^2y + 3ty^2 - y^3 + y^3} - \sqrt[3]{y^3 - y^3}}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{t^3 - 3t^2y + 3ty^2}{t^3}} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \sqrt[3]{\lim_{t \rightarrow 0} 1 - \frac{3y}{t} + \frac{3y^2}{t^2}} \end{aligned}$$

Poslední limita nevychází jako reálné číslo, pokud $y \neq 0$ tedy v tomhle případě derivace neexistuje. Naopak, pokud $y = 0$ tak derivace vychází 1.

Jelikož platí $f(x, y) = f(y, x)$, tak platí, že $f'_y(x, y) = f'_x(y, x)$, a proto platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$$

Stejným způsobem se ukáže, že $f'_y(-y, y)$ neexistuje pokud $y \neq 0$. Keď $y = 0$, tak je 1. Tím jsme vyřešili derivaci na celém $D(f)$ a máme hotovo.

Příklad 2 (g) $f(x, y) = |x| \cdot |y|$
 $D(f) = \mathbb{R}^2$

K vypočtení f'_x si výpočet rozdělme na tři části:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot |y|, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x \cdot |y|, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot |y|) = |y|, \quad x > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(-x \cdot |y|) = -|y|, \quad x < 0$$

Počítejme $f'_x(0, y)$. Jelikož je zřejmě funkce f v bodě $(0, y)$ spojitá pro libovolné y , můžeme použít větu o spojitosti derivace. Z té vyplývá, že $f'_x{}^+(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} |y| = |y|$. Podobně $f'_x{}^-(0, y) = -|y|$. Pokud tedy $y \neq 0$, pak $f'_x(0, y)$ neexistuje. Naopak $f'_x(0, 0) = 0$.

Za využití zřejmého vztahu $f(x, y) = f(y, x)$ dostáváme následující.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot |x|) = |x|, \quad y > 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(-y \cdot |x|) = -|x|, \quad y < 0$$

A pokud $x \neq 0$, pak $f'_y(x, 0)$ neexistuje. Naopak $f'_y(0, 0) = 0$.

Tím jsme vyřešili derivaci na celém, $D(f)$ a máme hotovo.

Příklad 2 (h) $f(x, y, z) = xyz + x \log z + yz^2$

Všimneme si, že jediné, čo nám omezuje definičný obor je logaritmus pri premennej z a teda dostavame: $D(f) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

Podme mechanicky derivovať:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz + \log(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = xz + z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy + \frac{x}{z} + 2yz$$

Všetky parciálne derivácie sú definované na celom definičnom obore, takže máme hotovo.

$$\textbf{Příklad 2 (i)} \quad f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^2 + y} \cdot \log(x^2 + y^2), & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ platí následující.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x \left(\frac{\log(x^2 + y^2)}{3\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}} \right) + \frac{\sqrt[3]{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}$$

Právě spočtená derivace je definována pro $y \neq -x^2$. Pro $y = -x^2$ je třeba derivaci spočítat zvlášť - z definice (nemáme dokázanu spojitost f v bodě $[0, 0]$).

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log((x+t)^2 + x^4)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2)}{t} \end{aligned}$$

Je-li $x^2 + x^4 \neq 1$, pak $\log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2) \rightarrow \log(x^2 + x^4) \neq 0$. Navíc platí, že $\frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt}}{t} = \sqrt[3]{\frac{t^2 + 2xt}{t^3}} = \sqrt[3]{\frac{t + 2x}{t^2}} \rightarrow \frac{2x}{+0} = \text{sign}(x) \cdot \infty$. Z toho nyní plyne, že pro $x^2 + x^4 \neq 1$ derivace f'_x v bodě $(x, -x^2)$ neexistuje.

Je-li $x^2 + x^4 = 1$, pak $\frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \log(x^2 + x^4 + 2xt + t^2)}{t} \rightarrow \frac{0}{0}$. Takže se tomuto případu musíme ještě pověnovat.

Dosaďme $x^2 + x^4 = 1$ a pišme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{t^2 + 2xt} \cdot \log(1 + 2xt + t^2) (2xt + t^2)}{t (2xt + t^2)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt[3]{t^2 + 2xt} \cdot (2x + t) \frac{\log(1 + 2xt + t^2)}{2xt + t^2} \\ &\stackrel{\text{VOLSF}}{=} 0 \cdot 2x \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Podobně by sme vyřešili i derivaci v proměnné y .

$$\textbf{Příklad 2 (j)} \quad f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}}, & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0, & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

Pro $[x, y] \neq [0, 0]$ platí násl.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{\frac{-1}{x^2 + xy + y^2}} \cdot \frac{1}{(x^2 + xy + y^2)^2} \cdot (2x + y)$$

Pro $[x, y] = [0, 0]$ je třeba spočítat f'_x zvlášť.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{(0+t)^2+t \cdot 0+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{t^2}}}{t} = 0$$

Proto $f'_x(0, 0) = 0$. Výpočet f'_y je obdobný.

Příklad 3 (a) $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $\mathbf{a} = [1, -2]$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x|y|}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \sqrt{-x|y|}, & x < 0. \end{cases}$$

f je spojitá v proměnné x i v proměnné y - použijeme pro výpočet derivací v nulách.

Pro $y \neq 0$ platí následující.

$$x > 0 \implies f'_x(x, y) = \frac{|y|}{2\sqrt{x|y|}}$$

$$x < 0 \implies f'_x(x, y) = \frac{-|y|}{2\sqrt{-x|y|}}$$

$$x = 0 \implies f'^+_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{|y|}{2\sqrt{x|y|}} = \frac{|y|}{2\sqrt{|y|}} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

$$x = 0 \implies f'^-_x(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-|y|}{2\sqrt{-x|y|}} = \frac{-|y|}{2\sqrt{|y|}} \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty$$

Platí, že $f'_x(0, y)$ pro $y \neq 0$ neexistuje.

Je-li $y = 0$, pak $f(x, y) = 0$. Z definice vyplývá, že $f'_x(x, 0) = 0$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Jelikož $f(x, y) = f(y, x)$, tak platí $f'_y(x, y) = f'_x(y, x)$. Proto platí následující.

Pro $x \neq 0$ platí:

$$y > 0 \implies f'_y(x, y) = \frac{|x|}{2\sqrt{y|x|}}$$

$$y < 0 \implies f'_y(x, y) = \frac{-|x|}{2\sqrt{-y|x|}}$$

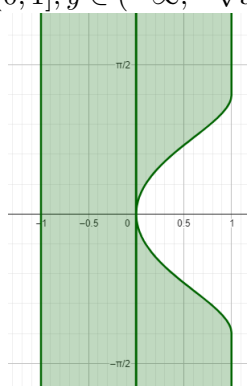
Dále $f'_y(x, 0)$ pro $x \neq 0$ neexistuje a $f'_y(0, y) = 0$ pro libovolné $y \in \mathbb{R}$.

Tečná rovina: počítejme z definice.

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= f(1, -2) + f'_x(1, -2) \cdot (x - 1) + f'_y(1, -2) \cdot (y - (-2)) = \\
&= \sqrt{|1 \cdot (-2)|} + \frac{|-2|}{2\sqrt{1 \cdot |-2|}} \cdot (x - 1) + \frac{-|1|}{2\sqrt{-(-2) \cdot |1|}} \cdot (y + 2) = \\
&= \sqrt{2} + \frac{(x - 1)}{\sqrt{2}} + \frac{-y - 2}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Příklad 3 (b) $f(x, y) = \sqrt{y^2 - \arcsin x}$, $\mathbf{a} = [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
D(f) &= [|x| \leq 1, y^2 - \arcsin x \geq 0] = [x \in [-1, 0]] \cup [x \in (0, 1], y^2 \geq \\
&\arcsin x] = [x \in [-1, 0]] \cup [x \in (0, 1], y \in (-\infty, -\sqrt{\arcsin x}] \cup [\sqrt{\arcsin x}, \infty)]
\end{aligned}$$



$D(f)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{y^2 - \arcsin x} \cdot \sqrt{1 - x^2}} \text{ pro } x \in (-1, 1), y^2 > \arcsin x$$

Parciální derivaci podle x nemá smysl počítat ve vynechaných bodech (definiční obor neobsahuje vodorovnou úsečku kolem nich).

$$f'_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y^2 - \arcsin x}} \text{ pro } x \in [-1, 1], y^2 > \arcsin x$$

Parciální derivaci podle y nemá smysl počítat ve vynechaných bodech až na počátek, neb definiční obor neobsahuje svislou úsečku kolem nich.

Spočteme ještě $f'_y(0, 0)$ (nelze počítat jako výše, protože odmocnina ve jmenovateli vychází 0).

f jakožto funkce proměnné y je v bodě $[0, 0]$ spojitá. Použijeme tedy větu 45 z minulého semestru.

$$\begin{aligned}
f_y^{'+}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0+} 1 = 1 \\
f_y^{-}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y \rightarrow 0-} -1 = -1
\end{aligned}$$

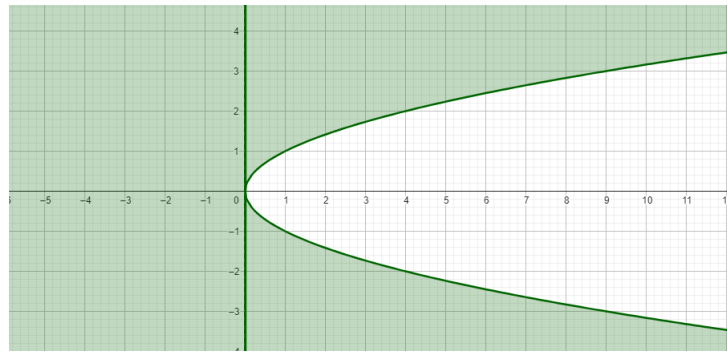
Limity vycházejí různě, tedy $f'_y(0,0)$ neexistuje.

Obě drivace jsou na okolí $[0,1]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(0, 1) + f'_x(0, 1) \cdot (x - 0) + f'_y(0, 1) \cdot (y - 1) = \\ &= \sqrt{1 - 0} + \frac{-1}{2} \cdot x + 1 \cdot (y - 1) = y - \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Příklad 3 (c) $f(x, y) = \sqrt{y^6 - x^3}$, $\mathbf{a} = [0, 2]$

$$\begin{aligned} D(f) &= [y^6 \geq x^3] = [x \leq 0] \cup [|y| \geq \sqrt{x}, x > 0] = \\ &= [x \leq 0] \cup [y \leq -\sqrt{x}, x > 0] \cup [y \geq \sqrt{x}, x > 0] \end{aligned}$$



$D(f)$:

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= \frac{-3x^2}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2 \\ f'_y(x, y) &= \frac{6y^5}{2\sqrt{y^6 - x^3}}, x < y^2 \end{aligned}$$

Z vynechaných bodů má smysl zkoumat pouze derivaci podle proměnné y v počátku, zbylé parciální derivace nemá smysl počítat, neboť funkce není definována na žádné úsečce příslušného směru. Počítáme opět dle věty 45 z minulého semestru.

$$\begin{aligned} f_y^+(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{6y^5}{2|y^3|} = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{6y^5}{2y^3} = \lim_{y \rightarrow 0+} 3y^2 = 0 \\ f_y^-(0, y) &= \lim_{y \rightarrow 0-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{6y^5}{2|y^3|} = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{6y^5}{-2y^3} = \lim_{y \rightarrow 0-} -3y^2 = 0 \end{aligned}$$

Tedy $f'_y(0,0) = 0$

Obě derivace jsou na okolí $[0, 2]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(0, 2) + f'_x(0, 2) \cdot (x - 0) + f'_y(0, 2) \cdot (y - 2) = \\ &= \sqrt{2^6} + 0 \cdot x + \frac{6 \cdot 2^5}{2 \cdot \sqrt{2^6}} \cdot (y - 2) = 8 + 12 \cdot (y - 2) \end{aligned}$$

Příklad 3 (d) $f(x, y) = \max\{y - \cos x, 0\}$, $\mathbf{a} = [0, \pi]$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

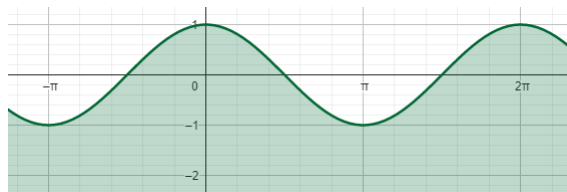
$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & y - \cos x \leq 0 \\ y - \cos x, & y - \cos x > 0. \end{cases}$$

Parciální derivace funkce lze vždy (z definice) počítat na pouze na otevřených množinách. Funkci f tedy můžeme zderivovat na otevřených množinách $[y - \cos x < 0]$, $[y - \cos x > 0]$ (otevřené dle věty ?? z 2. cvičení).

$$f'_x(x, y) = 0 = f'_y(x, y), y - \cos x < 0$$

$$f'_x(x, y) = \sin x, y - \cos x > 0$$

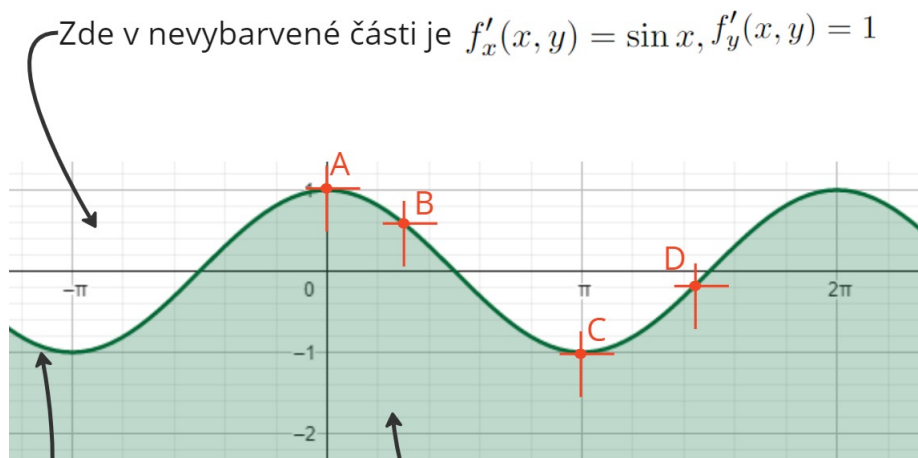
$$f'_y(x, y) = 1, y - \cos x > 0$$



$$[y - \cos x \leq 0] = [y \leq \cos x]:$$

Ve vynechaných bodech - tj. v bodech mimo množiny $[y - \cos x < 0]$, $[y - \cos x > 0]$, tj. v bodech $[y = \cos x]$ - počítáme opět dle věty 45 z minulého semestru. Nechť $k \in \mathbb{Z}$.

K použití věty 45 z minulého semestru bude potřeba znát v daných bodech, ve kterých směrech má parciální derivace jaký předpis. Vizte pomocný obrázek níže.



bod	f'_x zleva	f'_x zprava	f'_y shora	f'_y zdola
A	$\sin x,$	$\sin x,$	1	0
B	0	$\sin x,$	1	0
C	0	0	1	0
D	$\sin x,$	0	1	0

Zde, ve vybarvené oblasti je $f'_x(x, y) = 0 = f'_y(x, y)$

miro

Proto je si rozdělíme body následujícím způsobem (body typu A, B, C, D): vizte níže.

$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \implies f'_x{}^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} \sin t = \sin x$$

$$x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \implies f'_x{}^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} 0 = 0$$

$$x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \implies f'_x{}^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} 0 = 0$$

$$x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \implies f'_x{}^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} \sin t = \sin x$$

$$x = 2k\pi \implies f'_x{}^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} \sin t = \sin x$$

$$x = 2k\pi \implies f'_x{}^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} \sin t = \sin x$$

$$x = (2k+1)\pi \implies f'_x{}^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x+} 0 = 0$$

$$x = (2k+1)\pi \implies f'_x{}^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, \cos x) = \lim_{t \rightarrow x-} 0 = 0$$

$$f'_y{}^+(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow \cos x+} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow \cos x+} 1 = 1$$

$$f'_y{}^-(x, \cos x) = \lim_{t \rightarrow \cos x-} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow \cos x-} 0 = 0$$

Derivace podle x tedy existují jen v bodech $[k\pi, \cos(k\pi)]$ a vycházejí 0, derivace podle y neexistují nikde.

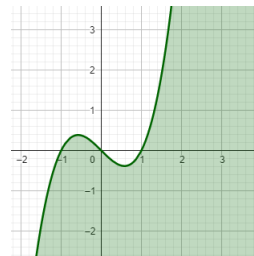
Obě derivace jsou na okolí $[0, \pi]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(0, \pi) + f'_x(0, \pi) \cdot (x - 0) + f'_y(0, \pi) \cdot (y - \pi) = \\ &= \pi - 1 + 0 + 1 \cdot (y - \pi) = y - 1 \end{aligned}$$

Příklad 3 (e) $f(x, y) = \max\{y + x, x^3\}$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & x^3 \geq y + x \\ y + x, & \text{jinak.} \end{cases}$$



$$[x^3 \geq y + x] = [y \leq x^3 - x]:$$

$$f'_x(x, y) = 3x^2, x^3 > y + x$$

$$f'_x(x, y) = 1, x^3 < y + x$$

$$f'_y(x, y) = 0, x^3 > y + x$$

$$f'_y(x, y) = 1, x^3 < y + x$$

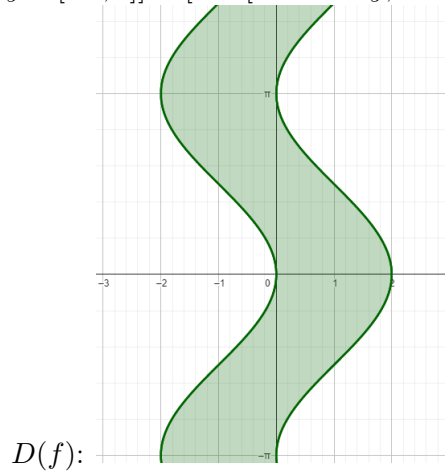
Vyšetřeme derivace v bodech křivky $y = x^3 - x$ pomocí věty 45 z minulého semestru.

$$\begin{aligned}
x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) &\Rightarrow f_x^+(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x+} 3t^2 = 3x^2 \\
x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) &\Rightarrow f_x^-(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x-} 1 = 1 \\
x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &\Rightarrow f_x^+(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x+} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x+} 1 = 1 \\
x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) &\Rightarrow f_x^-(x, x^3 - x) = \lim_{t \rightarrow x-} f'_x(t, x^3 + x) = \lim_{t \rightarrow x-} 3t^2 = 3x^2 \\
f_x^+ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) &= \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}+} f'_x \left(t, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}+} 1 = 1 \\
f_x^- \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) &= \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}-} f'_x \left(t, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}-} 1 = 1 \\
f_x^+ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}+} f'_x \left(t, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}+} 3t^2 = 1 \\
f_x^- \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) &= \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-} f'_x \left(t, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}-} 3t^2 = 1 \\
f_y^+(x, x^3 - x) &= \lim_{t \rightarrow x^3 - x+} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x+} 1 = 1 \\
f_y^-(x, x^3 - x) &= \lim_{t \rightarrow x^3 - x-} f'_y(x, t) = \lim_{t \rightarrow x^3 - x-} 0 = 0
\end{aligned}$$

Paricální derivace existují pouze v bodech $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right]$ podle x a vycházejí 1.

Příklad 4 (a) $f(x, y) = \arccos(x - \cos y)$, $\mathbf{a} = [1, 0]$

$$D(f) = [x - \cos y \in [-1, 1]] = [x \in [-1 + \cos y, 1 + \cos y]]$$



$$f'_x(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, -1 + \cos y < x < 1 + \cos y$$

$$f'_y(x, y) = \frac{\sin y}{\sqrt{1 - (x - \cos y)^2}}, -1 + \cos y < x < 1 + \cos y$$

Ve vynechaných bodech nemá smysl derivace počítat - vyjma bodů $[0, k\pi], k \in \mathbb{Z}$. Zde použijeme opět větu 45 z minulého semestru.

$$f_y^+(0, k\pi) = \lim_{y \rightarrow k\pi+} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow k\pi+} \frac{\sin y}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = \lim_{y \rightarrow k\pi+} \frac{\sin y}{|\sin y|} = \lim_{y \rightarrow k\pi+} (-1)^k = (-1)^k$$

$$f_y^-(0, k\pi) = \lim_{y \rightarrow k\pi-} f'_y(0, y) = \lim_{y \rightarrow k\pi-} \frac{\sin y}{|\sin y|} = \lim_{y \rightarrow k\pi-} (-1)^{k+1} = (-1)^{k+1}$$

$f'_y(0, k\pi)$ neexistuje.

Obě derivace jsou na okolí $[1, 0]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$T(x, y) = f(1, 0) + f'_x(1, 0) \cdot (x - 1) + f'_y(1, 0) \cdot (y - 0) =$$

$$= \arccos(0) + \frac{-1}{\sqrt{1 - 0}} \cdot (x - 1) + \frac{\sin 0}{\sqrt{1 - 0}} \cdot y = \frac{\pi}{2} + 1 - x$$

Příklad 4 (b) $f(x, y) = \log\left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}}\right)$

Najprv nás zaujíma definičný obor. Tak menovateľ nesmie byť nula. Tzn. potrebujeme, aby $|y| + \sqrt[3]{x} \neq 0$. Ak $x > 0$, tak to nenastane. Ak $x \leq 0$, tak dostávame podmienku, že $y \neq \pm \sqrt[3]{x}$.

Ďalej potrebujeme, aby bol argument logaritmu kladný. Tzn. $\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{|y| + \sqrt[3]{x}} > 0$

1. ak $|y| + \sqrt[3]{x} < 0$, potom potrebujeme, aby $1 - \sqrt[3]{x} < 0$, to však za danej podmienky neplatí nikdy.
2. ak $|y| + \sqrt[3]{x} > 0$, potom potrebujeme, aby $1 - \sqrt[3]{x} > 0$, tzn. $x < 1$.

Takže definičný obor je $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (|y| + \sqrt[3]{x} > 0) \wedge (1 > x)\}$

Zrátajme parciálnu deriváciu podľa x manuálne pre všetky hodnoty z definičného oboru, také, že $x \neq 0$:

$$f'_x(x, y) = \frac{|y| + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(|y| + \sqrt[3]{x}) - (1 - \sqrt[3]{x})\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}}{(|y| + \sqrt[3]{x})^2}$$

$$= -\frac{|y| + 1}{3(1 - \sqrt[3]{x})(|y| + \sqrt[3]{x}) \cdot x^{\frac{2}{3}}}$$

Zostáva nám ešte vyšetriť deriváciu podľa premennej x ešte v bodoch $x = 0$ a $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkcia v príslušných bodoch spojitá podľa premennej x a na okolí má deriváciu podľa premennej x takže môžeme parciálnu deriváciu rátať ako limitu parciálnych redivácií, podľa vety 45 z minulého semestra

$$\partial_x^+ f(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{|y|+1}{3(1-\sqrt[3]{x})(|y|+\sqrt[3]{x})x^{\frac{2}{3}}} \stackrel{\text{VOLSF}}{=} -\frac{|y|+1}{|y| \cdot 0_+} = -\infty$$

Takže parciálna derivácia sprava a teda ani parciálna derivácia neexistuje.

Ostáva nám vyšetriť parciálnu deriváciu v premennej y . Najprv pre $y > 0$

$$f'_y(x, y) = \frac{y + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(y + \sqrt[3]{x})^2} \cdot (-1) = \frac{-1}{y + \sqrt[3]{x}}$$

Krása, teraz to vyriešme pre $y < 0$

$$f'_y(x, y) = \frac{-y + \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{(-y + \sqrt[3]{x})^2} \cdot (-1) = \frac{-1}{-y + \sqrt[3]{x}}$$

Nakoniec zrátajme deriváciu pre $y = 0$ ako limitu derivácií, podľa vety 45 z minulého semestra.

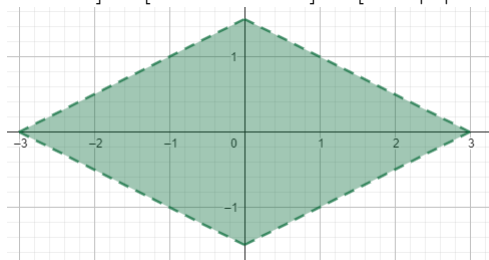
$$\partial_y^+ f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-1}{y + \sqrt[3]{x}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{x}} \quad \partial_y^- f(x, 0) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{1}{-y + \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Derivácia sprava a zľava existujú vlastné, ale nerovnejajú sa, takže derivácia neexistuje. Takže ostáva nájsť dotčnicovú rovinu ku grafu v bode $[-1, 3]$. Obidve derivácie sú na okolí spojité, takže môžeme uvažovať dotčnicovú nadrovinu

$$\begin{aligned} T(x, y) &= f(-1, 3) + f'_x(-1, 3) \cdot (x + 1) + f'_y(-1, 3) \cdot (y - 3) = \\ &= 0 - \frac{4}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} \cdot (x + 1) + \frac{-1}{2} \cdot (y - 3) = -\frac{x + 1}{3} - \frac{y - 3}{2} \end{aligned}$$

Příklad 4 (c) $f(x, y) = \log(e^3 - e^{|x|+2|y|})$, $\mathbf{a} = [1, \frac{1}{2}]$

$$D(f) = [e^3 - e^{|x|+2|y|} > 0] = [e^3 > e^{|x|+2|y|}] = [3 > |x| + 2|y|]$$



$D(f)$:

Při výpočtu f'_x pro $x = 0$ a f'_y pro $y = 0$ použijeme větu 45 z minulého semestra.

$$\begin{aligned}
f'_x(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \frac{\partial |x|}{\partial x}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \text{sign}(x)}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \text{ pro } x \neq 0 \\
f_x^{'+}(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{2|y|}}{e^3 - e^{2|y|}} \\
f_x^{'-}(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{e^{2|y|}}{e^3 - e^{2|y|}} \\
f'_y(x, y) &= \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot \frac{\partial 2|y|}{\partial y}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-e^{|x|+2|y|} \cdot 2 \text{sign}(y)}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} \text{ pro } y \neq 0 \\
f_y^{'+}(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0+} f'_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{-2e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{-2e^{|x|}}{e^3 - e^{|x|}} \\
f_y^{'-}(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0-} f'_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} \frac{2e^{|x|+2|y|}}{e^3 - e^{|x|+2|y|}} = \frac{2e^{|x|}}{e^3 - e^{|x|}}
\end{aligned}$$

Derivace $f'_x(0, y)$ a $f'_y(x, 0)$ neexistují.

Obě derivace jsou na okolí $[1, \frac{1}{2}]$ spojité, má tedy smysl uvažovat tečnou rovinu. Z definice dostáváme:

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= f\left(1, \frac{1}{2}\right) + f'_x\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) + f'_y\left(1, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \log(e^3 - e^2) + \frac{-e^2}{e^3 - e^2} \cdot (x - 1) + \frac{-2e^2}{e^3 - e^2} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = \\
&= \log(e^3 - e^2) - \frac{1}{e - 1}(x - 1) - \frac{1}{e - 1}\left(y - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$